Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

A AMPLITUDE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso

Thais Meurer Moscibroski

Florianópolis - SC

Maio de 2002

THAIS MEURER MOSCIBROSKI

A AMPLITUDE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de conclusão do curso Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).
Professor: Antonio Vladimir Martins

Florianópolis - SC
2002

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 22/SCG/02.

Nereu E. Burin

Prof. Nereu Estanislau Burin

Professor da Disciplina

Banca Examinadora:

Antonio Vladimir Martins

Antônio Vladimir Martins

Orientador

Jardel Morais Pereira

Jardel Morais Pereira

José Luiz Rosas Pinho

Dedico a vitória desta etapa de minha vida à minha família, pelo apoio em todas as horas, e ao meu orientador e amigo Antonio Vladimir Martins, por ter acreditado em mim.

À eles todo o meu carinho.

Muito obrigada!

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Existem muitos números irracionais?

Ainda que tenhamos a sensação de termos cruzado com poucos números irracionais em nosso dia a dia (por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e, $\log 2$) existe uma grande quantidade deles, já que um número com representação decimal infinita que não é periódica não pode ser racional.

Neste trabalho destacamos o quão grande é o conjunto dos números irracionais, respondendo perguntas como:

Existem mais números irracionais do que racionais?

Os irracionais podem ser colocados em uma lista como os números naturais?

Em **N** há vários subconjuntos especiais como o subconjunto dos números primos, dos pares, impares, de Fibonacci, de Fermat, entre outros. E em **R-Q**, será que existem muitos subconjuntos especiais?

Para isto, dividiremos este trabalho em três partes. Na primeira parte, números irracionais, contaremos um pouco da história destes números e citaremos alguns exemplos. Na segunda parte, Números Algébricos e Transcendentes, novamente contaremos um pouco da história, definiremos os dois tipos de números, apresentaremos exemplos e propriedades, definiremos conjunto enumerável e daremos exemplos. Na última parte trataremos de Frações Contínuas, apresentando sua definição, citando alguns nomes importantes em sua história, obtendo frações contínuas para números racionais e irracionais como π, $\sqrt{3}$, $\log 2$ e $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e mostrando alguns subconjuntos especiais dos irracionais.

Minha intenção nessa monografia é cativar a atenção do leitor para este universo que é o conjunto dos números irracionais, evitando, na medida do possível, os pormenores técnicos.

1 NÚMEROS IRRACIONAIS

O conjunto dos números reais **R**, uma das idealizações mais audaciosas da mente humana segundo Ian Stewart, é a reunião dos conjuntos dos números racionais e irracionais.

O significado matemático da palavra "racional" se refere à razão de números inteiros e "irracional" a ausência de uma tal razão.

Foram os gregos, no século V a.C., que descobriram que os números irracionais são indispensáveis em geometria. Os matemáticos gregos comparavam grandezas de uma mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes.

Aparentemente, os gregos ficaram surpresos ao descobrirem os números irracionais, porque pensaram que, dados dois segmentos quaisquer, como o lado e a diagonal de um quadrado, existiriam sempre inteiros a e b, tais que a razão dos comprimentos dos segmentos fosse $\frac{a}{b}$.

No tempo de Pitágoras (580 – 500 a.C., aproximadamente) pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta. Foram os pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C..

A palavra "comensurável" é usada para descrever dois comprimentos cuja razão é um número racional. Duas grandezas comensuráveis são tais que uma delas pode ser medida por intermédio da outra, ou seja, existe um inteiro k tal que, se dividirmos o primeiro segmento em k partes iguais, cada uma de comprimento l, o segundo segmento também poderá ser dividido em um número inteiro, digamos m, de partes iguais, cada uma de comprimento l. A razão dos comprimentos dos dois segmentos será $\frac{kl}{ml}=\frac{k}{m}$ que é um número racional.

Entretanto, se os segmentos forem tais que a razão de seus comprimentos é irracional, então a construção acima nunca poderia ser feita. Neste caso, dizemos que os segmentos dados são incomensuráveis.

O fato de existirem segmentos incomensuráveis contraria nossa intuição geométrica pois se o comprimento l não serve para medir ao mesmo tempo dois segmentos quaisquer, poderíamos imaginar um comprimento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Poderíamos imaginar um segmento tão pequeno que nem se possa mais desenhar. Por isso, a descoberta de grandezas incomensuráveis na antigüidade representou um momento de crise do desenvolvimento da Matemática.

O primeiro exemplo de um par de segmentos incomensuráveis, descoberto por Pitágoras e seus discípulos, é bastante simples: se tomarmos o lado de um quadrado como segmento unitário, a diagonal desse quadrado não pode ter comprimento racional, ou seja, o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis, ou ainda, $\sqrt{2}$ é irracional.

De fato, se o lado e a diagonal fossem comensuráveis, tomando o lado como unidade, obteríamos para comprimento da diagonal um número racional $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros.

Em virtude do teorema de Pitágoras aplicado a um dos triângulos retângulos formado por dois lados e a diagonal do quadrado, temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2.q^2$$

Mas a última igualdade é um absurdo. Os inteiros p^2 e q^2 contêm cada um dos seus fatores primos um número par de vezes, pois estão elevados ao quadrado. Por conseguinte, $2q^2$ contém um número ímpar de fatores iguais a 2 e assim não pode ser igual a p^2.

Como a teoria pitagórica das grandezas se baseava na crença intuitiva de que todas as grandezas de mesma espécie deveriam ser comensuráveis, a descoberta de grandezas incomensuráveis provocou grandes transtornos. Para eles o número era a essência de tudo. Eles acreditavam na possibilidade de explicar todos os fenômenos do mundo sensível em termos dos números e de suas relações. O número seria a essência última do ser e de todos os fenômenos. Mas, por número eles entendiam somente os inteiros positivos: 1, 2, 3, ... Nem as frações eram números, já que elas apareciam como relações entre grandezas de mesma espécie. Após a descoberta de grandezas incomensuráveis ficou claro que os números naturais eram insuficientes até mesmo para definir a razão entre duas grandezas e toda a teoria pitagórica de proporções, com todas as suas conseqüências, teria que ser jogada fora por ser infundada.

Tão grande foi o "escândalo lógico" que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta a lenda que o pitagórico Hipaso foi lançado ao mar por revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda exigido um túmulo, como se estivesse morto.

Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene, por volta de 425 a.C., mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais.

A superação da crise não foi fácil nem rápida. O matemático grego Eudóxio, discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, foi o primeiro a lidar de modo preciso com grandezas incomensuráveis, por volta de 370 a.C.. Ele desenvolveu uma teoria que, em linguagem moderna, diz que para conhecer um número irracional x basta conhecer os números racionais menores do que x (suas aproximações por falta) e os números racionais maiores do que x (suas aproximações por excesso). Por este processo podemos obter aproximações para um número irracional com um erro tão pequeno quanto se queira.

Para comparar duas grandezas da mesma espécie, em vez de número, Eudóxio adotou o conceito de "razão entre duas grandezas".

Eudóxio desenvolveu a teoria das razões entre grandezas de forma logicamente impecável. As definições básicas são as de igualdade e desigualdade entre duas razões. A notável abordagem dos incomensuráveis de Eudóxio pode ser encontrada no quinto livro dos Elementos de Euclides e coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais dada por Richard Dedekind em 1872.

Porém, uma grave deficiência no formalismo criado por Eudóxio e apresentado nos Elementos de Euclides era que não se efetuavam operações aritméticas com razões.

Poderíamos pensar que não precisamos dos números irracionais pois os números usados para fazer medições científicas são os racionais. Porém sem os números irracionais o símbolo $\sqrt{2}$ não teria significado e como resultado a circunferência $x^2+y^2=4$ e a reta $x=y$ não se interceptariam. Isto sugere que o sistema de números racionais é um instrumento inadequado para representar os objetos da geometria e os movimentos contínuos da física. Além disso, sem os números irracionais a maioria das seqüências e séries não convergiriam e a maioria das integrais não existiria e a estrutura de análise matemática desmoronaria pois π e e não teriam significado.

1.1 PROPRIEDADES DE FECHAMENTO

Ao contrário dos números racionais, que são fechados em relação à adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero), os números irracionais não possuem nenhuma destas propriedades, pois:

$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, onde zero é racional;

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$, onde um é racional;

$\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$, onde zero é racional;

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2$, onde dois é racional.

1.2 PRODUÇÃO DE INFINITOS NÚMEROS IRRACIONAIS

1.2.1 Teorema 01

Seja a um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Então a adição, subtração, multiplicação e divisão de r e a resultarão em números irracionais. Também $-a$ e a^{-1} são irracionais.

A demonstração por absurdo é imediata.

Exemplos:

Seja $a=\sqrt{51}$ e $r=\dfrac{3}{2}$, então

$\sqrt{51}+\dfrac{3}{2}$ é irracional,

$\sqrt{51}-\dfrac{3}{2}$ é irracional,

$\dfrac{3}{2}-\sqrt{51}$ é irracional,

$\dfrac{3\sqrt{51}}{2}$ é irracional,

$\dfrac{2\sqrt{51}}{3}$ é irracional,

$\dfrac{3\sqrt{51}}{102}$ é irracional,

$-\sqrt{51}$ é irracional e

$\dfrac{1}{\sqrt{51}}=\dfrac{\sqrt{51}}{51}$ é irracional.

1.2.2 Teorema 02

Sejam a e b inteiros.

Se o inteiro $n=a.b$ é tal que $\sqrt{n}=\sqrt{a.b}$ é irracional, então $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é irracional.

De fato, se supormos que $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ seja racional, teremos:

$r=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$r^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$

$r^2 = a + 2.\sqrt{a}.\sqrt{b} + b$

$r^2 = a + 2.\sqrt{a.b} + b$

$\sqrt{a.b} = \dfrac{r^2 - a - b}{2}$

Mas como os racionais são fechados em relação à adição, subtração e divisão e como r, a, b e 2 são racionais teríamos que $\sqrt{a.b}$ é racional. O que é uma contradição.

Exemplo:

$\sqrt{10} = \sqrt{5.2}$ é irracional logo $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$ também é irracional.

1.3 CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA QUE UM NÚMERO NÃO INTEIRO SEJA IRRACIONAL

Se $b \notin Z$ satisfaz $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, onde a_0, a_1, ..., a_{n-1} são inteiros então b é irracional.

A demonstração pode ser encontrada no livro "Números Racionais e Irracionais" de Ivan Niven e é feita por redução ao absurdo baseando-se no seguinte resultado:

"Seja $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$ uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros. Se esta equação tiver uma raiz racional $\frac{a}{b}$, onde $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então a será um divisor de c_0 e b um divisor de c_n".

Com isto podemos mostrar, por exemplo, que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ é irracional.

De fato, seja $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$$

$$x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-4\sqrt{2}=2$$

$$x^3+6x-2=3\sqrt{2}x^2+4\sqrt{2}$$

$$x^3+6x-2=\sqrt{2}\left(3x^2+4\right)$$

$$\left[x^3+6x-2\right]^2=\left[\sqrt{2}\left(3x^2+4\right)\right]^2$$

$$x^6+12x^4-4x^3+36x^2-24x+4=2\left(9x^4+12x^2+4\right)$$

$$x^6+12x^4-4x^3+36x^2-24x+4=18x^4+24x^2+8$$

$$x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0$$

Sabemos que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ não é inteiro pois $1<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$ e $1<\sqrt[3]{2}<\frac{3}{2}$ e somando as desigualdades temos que $2<\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}<3$.

Como $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ não é inteiro e é raiz, por construção, do polinômio $x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0$, que tem todos os coeficientes inteiros, temos que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ é irracional.

1.4 O LOGARITMO DE 2 NA BASE 10 ($\log 2$) É IRRACIONAL

Suponhamos que $\log 2$ seja racional. Assim $\log 2 = \frac{a}{b}$, onde a e b são naturais, já que $\log 2 > 0$.

$$\log 2 = \frac{a}{b}$$

$$10^{\frac{a}{b}} = 2$$

$$\left(10^{\frac{a}{b}}\right)^b = 2^b$$

$$10^a = 2^b$$

$$(2 \cdot 5)^a = 2^b$$

$$2^a \cdot 5^a = 2^b$$

Como a e b são naturais, podemos dizer que $2^a \cdot 5^a$ e 2^b são números naturais. Portanto a igualdade acima não pode ser verdadeira pois o Teorema Fundamental da Aritmética garante que todo número natural, diferente de 1, pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores.

1.5 e É IRRACIONAL

Para mostrar que e é irracional usamos a definição: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$.

Suponhamos que e seja racional, ou seja, $e=\frac{p}{q}$, com p e q naturais e $\frac{p}{q}$ irredutível.

Portanto,

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$$

Agora, temos que

$$0<\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{q!}\right)=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{q!}\right)=$$

$$=\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\dots=\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+2)(q+1)}+\frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)}+\dots\right).$$

Podemos dizer que

$$\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+2)(q+1)}+\frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)}+\dots\right)<$$

$$<\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+1)(q+1)}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\dots\right).$$

Vemos que $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\dots$ é a soma de uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{q+1}$ e primeiro termo $\frac{1}{q+1}$.

Portanto,

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\dots=\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q+1-1}{q+1}}=\frac{1}{(q+1)}\cdot\frac{(q+1)}{q}=\frac{1}{q}.$$

Voltando, temos que

$$\frac{1}{q!}\cdot\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots\right)=\frac{1}{q!}\cdot\frac{1}{q}.$$

Portanto,

$$0<\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)<\frac{1}{q!}\cdot\frac{1}{q}.$$

Multiplicando todos os membros por $q!$ temos

$$0<q!\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{q!}\right)<\frac{1}{q}.$$

Vemos que o termo do meio é inteiro pois $q!$ cancela todos os denominadores das frações.

Temos que $2<e<3$ pois $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=$

$$=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2+1=3.$$

Como $2<e<3$ devemos ter $q>1$ e portanto $\frac{1}{q}<1$.

Logo, $0<q!\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{q!}\right)<1$.

O que é um absurdo porque não existe número inteiro entre 0 e 1.

Portanto e é irracional.

2 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Os matemáticos gregos antigos enfrentavam problemas geométricos de construção de figuras com propriedades especificadas. Eles, com freqüência, conseguiram resolver seus problemas, mas, às vezes, isso não ocorria como na "duplicação do cubo", na "trisecção de um ângulo" e na "quadratura do círculo" utilizando somente régua sem marcas e compasso.

A teoria dos números algébricos e transcendentes possibilitou aos matemáticos concluir que as construções desses três problemas geométricos não podem ser efetuadas pelos métodos de construção da Geometria Euclidiana.

Os números algébricos são de grande interesse e importância por muitas razões que provêm da Álgebra e da Teoria dos Números.

2.1 DEFINIÇÃO

Um número real ou complexo é algébrico se é solução de equação algébrica com coeficientes inteiros.

Em outras palavras, se um número satisfaz alguma equação da forma $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ com coeficientes inteiros, $n \geq 1$ e $c_n \neq 0$, dizemos que ele é um número algébrico.

Um número que não é solução de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros é dito número transcendente, ou seja, um número é transcendente se não é algébrico.

Sobre este segundo tipo de número Leonard Euler disse: *"Eles transcendem o poder dos métodos algébricos."* Daí, a designação de transcendentes.

Exemplos:

2 é algébrico porque é solução das equações $x^2 - 4 = 0$ e $x - 2 = 0$.

$\sqrt{2}$ é algébrico, pois satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$.

$i = \sqrt{-1}$ é algébrico, pois satisfaz a equação $x^2 + 1 = 0$.

2.1.1 $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ É Algébrico, com n Natural

A prova da afirmação acima é um caso particular da afirmação: "$\cos(n\theta)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n em $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta$ é um polinômio de grau menor ou igual a $n+1$ em $\cos\theta$, ambos com coeficientes inteiros", que justificaremos por indução.

Para $n = 1$,

$\cos(1.\theta) = \cos\theta$ satisfaz $f(\cos\theta) = \cos(1.\theta)$, onde $f(x) = x$ (polinômio de grau 1);

$\operatorname{sen}(1.\theta).\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$ satisfaz $f(\cos\theta) = \operatorname{sen}(1.\theta)\operatorname{sen}\theta$, onde $f(x) = 1 - x^2$ (polinômio de grau 2).

Vamos supor que a afirmação é válida para $n = k$, ou seja, $a_k(\cos\theta)^k + a_{k-1}(\cos\theta)^{k-1} + \ldots + a_2(\cos\theta)^2 + a_1\cos\theta + a_0 = \cos(k.\theta)$ e $b_{k+1}(\cos\theta)^{k+1} + b_k(\cos\theta)^k + \ldots + b_2(\cos\theta)^2 + b_1\cos\theta + b_0 = \operatorname{sen}(k.\theta).\operatorname{sen}\theta$, onde os coeficientes a_j's e b_j's são inteiros.

Agora, queremos saber se a afirmação é válida para $n = k+1$.

$$\cos[(k+1)\theta] = \cos(k\theta+\theta) = \cos(k\theta).\cos\theta - \operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}\theta =$$

$$= \left[a_k(\cos\theta)^k + a_{k-1}(\cos\theta)^{k-1} + \ldots + a_1\cos\theta + a_0\right]\cos\theta +$$

$$-\left(b_{k+1}(\cos\theta)^{k+1} + b_k(\cos\theta)^k + \ldots + b_2(\cos\theta)^2 + b_1\cos\theta + b_0\right) =$$

$$= a_k(\cos\theta)^{k+1} + a_{k-1}(\cos\theta)^k + \ldots + a_1(\cos\theta)^2 + a_0\cos\theta +$$

$$-b_{k+1}(\cos\theta)^{k+1} - b_k(\cos\theta)^k - \ldots - b_2(\cos\theta)^2 - b_1\cos\theta - b_0 =$$

$$= (a_k - b_{k+1})(\cos\theta)^{k+1} + (a_{k-1} - b_k)(\cos\theta)^k + \ldots + (a_1 - b_2)(\cos\theta)^2 +$$

$$+ (a_0 - b_1)\cos\theta + b_0$$

Portanto $\cos(n\theta)$ é polinômio em $\cos\theta$ com coeficientes inteiros, de grau menor ou igual a $k+1$, para $n = k+1$.

Logo, existe um polinômio $f(x)$ de grau menor ou igual a n tal que $f(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ para todo n.

$$\operatorname{sen}[(k+1).\theta].\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(k\theta+\theta).\operatorname{sen}\theta = [\operatorname{sen}(k\theta).\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.\cos(k\theta)].\operatorname{sen}\theta =$$

$$= \operatorname{sen}(k\theta).\operatorname{sen}\theta.\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta.\cos(k\theta) =$$

$$= \left(b_{k+1}(\cos\theta)^{k+1} + b_k(\cos\theta)^k + \ldots + b_2(\cos\theta)^2 + b_1\cos\theta + b_0\right)\cos\theta +$$

$$+ \left(1-\cos^2\theta\right)\left(a_k(\cos\theta)^k + a_{k-1}(\cos\theta)^{k-1} + \ldots + a_2(\cos\theta)^2 + a_1\cos\theta + a_0\right) =$$

$$= b_{k+1}(\cos\theta)^{k+2} + b_k(\cos\theta)^{k+1} + \ldots + b_2(\cos\theta)^3 + b_1(\cos\theta)^2 + b_0\cos\theta +$$

$$+ a_k(\cos\theta)^k + a_{k-1}(\cos\theta)^{k-1} + \ldots + a_2(\cos\theta)^2 + a_1\cos\theta + a_0 +$$

$$- a_k(\cos\theta)^{k+2} - a_{k-1}(\cos\theta)^{k+1} - \ldots - a_2(\cos\theta)^4 - a_1(\cos\theta)^3 - a_0(\cos\theta)^2 =$$

$$= (b_{k+1} - a_k)(\cos\theta)^{k+2} + (b_k - a_{k-1})(\cos\theta)^{k+1} + (a_k + b_{k-1} - a_{k-2})(\cos\theta)^k +$$

$$+ (a_{k-1} + b_{k-2} - a_{k-3})(\cos\theta)^{k-1} + \ldots + (a_4 + b_3 - a_2)(\cos\theta)^4 +$$

$$+ (a_3 + b_2 - a_1)(\cos\theta)^3 + (a_2 + b_1 - a_0)(\cos\theta)^2 + (a_1 + b_0)\cos\theta + a_0$$

Que é um polinômio com coeficientes inteiros de grau menor ou igual a $k+2$. E, portanto $\mathrm{sen}[(k+1).\theta]\,\mathrm{sen}\,\theta$ é um polinômio de grau menor ou igual a $k+2$.

Logo, "$\mathrm{sen}(n\theta).\mathrm{sen}\,\theta$ é polinômio em $\cos\theta$" para todo n.

Se $\theta = \frac{\pi}{n}$, então $f\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \cos\left(n.\frac{\pi}{n}\right) = \cos\pi = -1$.

O polinômio $g(x) = f(x) + 1$ tem coeficientes inteiros e para $x = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, temos:

$$g\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = f\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] + 1 = -1 + 1 = 0$$

Como, $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é raiz de $g(x)$ então, $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é algébrico.

2.1.2 $\cos(1°)$ É Algébrico

Basta notar que $1° = \frac{\pi}{180}\,radianos$ e usar 2.1.1.

2.2 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS ALGÉBRICOS

Sejam a e b algébricos e $a \neq 0$. Então $a+b$, $a.b$ e a^{-1} são algébricos.

Provaremos que a^{-1} é algébrico pois usaremos este resultado no decorrer deste texto.[1]

De fato, se a é algébrico então a é raiz de $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, ou seja, $c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0 = 0$, onde c_n, c_{n-1}, ..., c_0 são inteiros.

Multiplicando $c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0 = 0$ por a^{-n} temos

$$a^{-n}\left(c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0\right) = a^{-n} \cdot 0$$

$$c_n a^n a^{-n} + c_{n-1} a^{n-1} a^{-n} + \ldots + c_1 a a^{-n} + c_0 a^{-n} = 0$$

$$c_n a^{n-n} + c_{n-1} a^{n-1-n} + \ldots + c_1 a^{1-n} + c_0 a^{-n} = 0$$

$$c_n a^0 + c_{n-1} a^{-1} + \ldots + c_1 a^{-(n-1)} + c_0 a^{-n} = 0$$

$$c_n + c_{n-1} a^{-1} + \ldots + c_1 \left(a^{-1}\right)^{n-1} + c_0 \left(a^{-1}\right)^n = 0$$

$$c_0 \left(a^{-1}\right)^n + c_1 \left(a^{-1}\right)^{n-1} + \ldots + c_{n-1} a^{-1} + c_n = 0$$

ou seja, a^{-1} é raiz de

$$s(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n$$

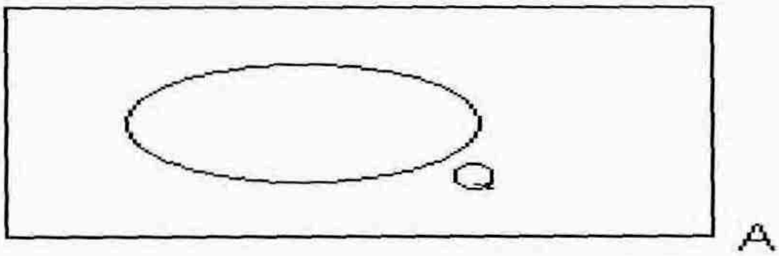
Logo a^{-1} é algébrico.

---

[1] A demonstração de que $a+b$ e $a.b$ são algébricos podem ser encontradas no livro "Números Irracionais e Transcendentes" de Djairo G de Figueiredo.

2.3 TODO RACIONAL É ALGÉBRICO

Os números algébricos constituem uma generalização dos números racionais pois todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser definido como raiz da equação, com coeficientes inteiros, $bx - a = 0$.



Assim, se um número é racional então este número é algébrico. E pela contrapositiva, se um número é não algébrico então ele é não racional ou seja, todo número transcendente é irracional.

2.4 NÚMEROS DE LIOUVILLE

Os primeiros números transcendentes conhecidos foram apresentados em 1851 pelo matemático francês Joseph Liouville (1809-1882).

Liouville construiu seus exemplos a partir do seguinte teorema, conhecido como Teorema de Liouville:

Seja a um número irracional e algébrico de grau[2] n então existe um número positivo C tal que $\left|a-\frac{p}{q}\right|>\frac{C}{q^n}$, para todo número racional $\frac{p}{q}$, $q>0$.

Pela contrapositiva, temos:

"Se C é um número positivo arbitrário, n é um número natural arbitrário e existem inteiros p e q ($q>0$) tal que $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{C}{q^n}$ então o número α é transcendente ou é racional."[3]

Assim, Liouville provou, por exemplo, que o número $a=0{,}110001000000000000000001000\ldots$,que é irracional, onde os "1" ocorrem na $n!$ casa decimal, com $n\geq 1$, é transcendente.

2.4.1 Grau de um Número Algébrico

Diz-se que um número algébrico a é de grau n se ele for raiz de uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, e se não existir uma equação desse tipo, de menor grau, da qual a seja raiz.

Um teorema importante afirma que um número α é construtível com régua e compasso se e somente se α é algébrico de grau igual a uma potência de dois.

---

[2] Ver 2.4.1

[3] Os números α que satisfazem estas condições são chamados Números de Liouville. A prova deste teorema pode ser encontrada no muito citado livro "Continued Fractions" de A. Ya. Khinchin, Dover Pub. 1997.

Com este teorema temos a comprovação de que dois dos três problemas clássicos da geometria não tem resolução.

De fato, na duplicação do cubo teríamos que construir com régua e compasso um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$, que é um número algébrico de grau três, pois satisfaz $x^3 - 2 = 0$ e $x^3 - 2$ é irredutível sobre o conjunto dos números racionais.

Se a trissecção de um ângulo genérico fosse sempre possível, poderíamos trissectar um ângulo de 60°, que equivale construir um ângulo de 20°. Porém, se um ângulo é construtível com régua e compasso, seu cosseno também é. Entretanto fazendo $\theta = 20°$ na fórmula geométrica $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ temos $\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$, ou ainda, $\frac{1}{2} = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$. Assim, por construção, $\cos 20°$ será raiz do polinômio $8x^3 - 6x - 1$, que é irredutível sobre o conjunto dos números racionais. Portanto $\cos 20°$ não é construtível com régua e compasso e, por conseqüência, 20° também não é.[4]

2.4.2 Uma Aplicação de um Número de Liouville

Podemos usar o número $x = 0{,}110001000000000000000001000\ldots$ que é um número de Liouville para provar o seguinte teorema:

---

[4] A prova de que $x^3 - 2$ e $8x^3 - 6x - 1$ são polinômios irredutíveis sobre o conjunto dos números racionais pode ser encontrada no Trabalho de Conclusão de Curso de Jociane Mees, Matemática-UFSC,1999.

Dados dois números reais A e B, com $A \neq B$, sempre existe um número irracional entre eles.[5]

Dividiremos a prova em dois casos e vamos supor $A < B$.

Caso 1: A e B são racionais.

Seja $x = 0{,}1100010000000000000000001000\ldots$, que é um número irracional e está entre 0 e 1.

Então $t = A + x(B - A)$ é um número irracional entre A e B.

De fato, se t fosse racional teríamos $x = \dfrac{t - A}{B - A}$ com x irracional e $\dfrac{t - A}{B - A}$ racional (os racionais são fechados que relação a subtração e a divisão). O que é uma contradição.

O número t está entre A e B.

De fato,

$A < t$ pois $x = 0{,}1100010000000000000000001000\ldots$ e $B > A$, ou seja, $B - A > 0$. Portanto $x.(B - A) > 0$. Logo $A + x.(B - A) > A$, ou seja, $t > A$.

$t < B$ pois sendo $x < 1$ e $B > A$, temos $x(B - A) < B - A$. Daí, $A + x.(B - A) < B$, ou seja, $t < B$.

Caso2: A ou B ou ambos são irracionais.

Consideraremos, agora, $t = \overline{A} + x(\overline{B} - \overline{A})$ onde $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são os truncamentos dos desenvolvimentos decimais de A e B respectivamente, tomando-se um número suficiente de casas e

[5] Extraído da Revista do Professor de Matemático n.º 9, 1986, página 64.

alterando-se alguma casa em $\overline{A}$, para se ter $\overline{A}$ e $\overline{B}$ entre A e B e $\overline{A} \neq \overline{B}$.

Por exemplo, se $A = \sqrt{2}$ e $B = \sqrt{2} + 10^{-7}$, temos $A = 1{,}41421356...$ e $B = 1{,}41421366...$. Fazendo $\overline{A} = 1{,}4142135$ e $\overline{B} = 1{,}4142136$, teremos que somar um ao algarismo da última casa de $\overline{A}$ para ter $A < \overline{A}$. Assim, $\overline{A} = 1{,}4142136$ é igual a $\overline{B} = 1{,}4142136$. Então temos que ter mais uma casa decimal em $\overline{B}$ para ter $\overline{A} < \overline{B}$. Teremos, então $\overline{A} = 1{,}4142136$ e $\overline{B} = 1{,}41421366$.

Tendo $\overline{A}$ e $\overline{B}$ racionais retornamos ao caso 1, obtendo t entre $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Como $\overline{A}$ e $\overline{B}$ estão entre A e B, temos que t está entre A e B.

2.5 CONJUNTO ENUMERÁVEL

Por muito tempo os números de Liouville eram os únicos transcendentes conhecidos.

A situação mudou quando Georg Cantor (1845-1918) mostrou que a maioria dos números é transcendente. Para isso usou a noção de conjunto enumerável.

2.5.1 Definição

Um conjunto infinito se diz enumerável se os seus elementos puderem ser escritos em forma de uma seqüência: a_1, a_2, a_3, a_4, ..., de modo que qualquer elemento do conjunto seja um termo da seqüência.

Por exemplo, o conjunto dos números inteiros é enumerável pois pode ser escrito como 0, 1, -1, 2, -2 , 3, -3, 4, -4, ...

2.5.2 O Conjunto dos Números Algébricos É Enumerável

Seja $f(x)=c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ com coeficientes inteiros e suponhamos, sem perda de generalidade, que $c_n > 0$.

Consideremos a altura h do polinômio, definida por $h = n + c_n + |c_{n-1}| + |c_{n-2}| + ... + |c_2| + |c_1| + |c_0|$.

Obviamente h é um inteiro maior ou igual a dois. Podemos ver que o conjunto de polinômios de uma dada altura h é finito, pois, por exemplo,

para $h=2$ temos o polinômio x;

para $h=3$ temos os polinômios $x+1$, $x-1$, x^2 e $2x$;

para $h=4$ temos os polinômios x^3, x^2+1, x^2-1, $2x^2$, $2x+1$, $2x-1$, $x+2$, $x-2$ e $3x$.

Como cada polinômio de grau n pode ter no máximo n raízes e como cada altura h fornece um número finito de polinômios podemos dizer que cada altura h fornece apenas um número finito de raízes dos polinômios. Como os coeficientes de cada polinômio, neste caso, são inteiros, temos que estas raízes são os números algébricos. Então, cada altura h fornece um número finito de números algébricos.

Assim, os números algébricos podem ser classificados pelas alturas dos polinômios dos quais são raízes.

Pode-se então construir uma lista, teoricamente falando, de todos os números algébricos, tomando primeiro aqueles que resultam de polinômios de altura 2, depois aqueles que resultam de polinômios de altura 3 e assim por diante, eliminando-se em cada etapa aqueles que constituíram repetições. Podendo ser colocados numa lista infinita, os números algébricos formam um conjunto enumerável.

2.5.3 Um Subconjunto Infinito M de um Conjunto Enumerável S É Enumerável

Para sua justificativa, seja $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,...\}$, n_1 o menor inteiro positivo, tal que a_{n_1} pertence a M, n_2 o menor inteiro positivo tal que $n_2>n_1$ e a_{n_2} pertence a M, n_3 o menor inteiro positivo tal que $n_3>n_2$ e a_{n_3} pertence a M, e assim por diante. Então podemos concluir que $M=\{a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},a_{n_4},...\}$, que é enumerável.

E pela contrapositiva, se existe um subconjunto não enumerável de S então o conjunto S é não enumerável.

2.5.4 O Conjunto dos Números Reais É Não Enumerável

Podemos demonstrar que o conjunto dos números reais é não enumerável mostrando que o conjunto dos números reais do intervalo $0 \leq x \leq 1$ não é enumerável.

Seja $A = [0,1]$.

Suponhamos que A seja enumerável, então, $A = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Podemos dizer que $A = [0,1] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Vemos que x_k, com k natural, não pode pertencer aos três subintervalos.

Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um dos subintervalos acima tal que $x_1 \notin I_1$.

Dividindo I_1 em três partes iguais, temos:

$$I_1 = \left[a_1, a_1 + \frac{1}{9}\right] \cup \left[a_1 + \frac{1}{9}, a_1 + \frac{2}{9}\right] \cup \left[a_1 + \frac{2}{9}, b_1\right].$$

Seja $I_2 = [a_2, b_2]$ um dos subintervalos de I_1 tal que $x_2 \notin I_2$.

Dividindo I_2, temos:

$$I_2 = \left[a_2, a_2 + \frac{1}{27}\right] \cup \left[a_2 + \frac{1}{27}, a_2 + \frac{2}{27}\right] \cup \left[a_2 + \frac{2}{27}, b_2\right].$$

E assim sucessivamente, teremos uma seqüência de intervalos fechados de modo que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ tais que $x_n \notin I_n$ para todo n natural.

Mas existe uma propriedade dos intervalos encaixantes que diz que:

"Seja $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$,... uma seqüência decrescente de intervalos encaixados (limitados e fechados), isto é, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$. Então, existe, ao menos, um ponto comum a todos esses intervalos."[6]

Isto garante que existe um números real $y \in A = [0,1]$ tal que y pertence a todo intervalo $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \ldots$.

Mas $y \in A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, isto é, $y = x_k$ para algum k natural.

Porém, pela construção acima, $y = x_k \notin I_k$. O que é uma contradição.

Logo o intervalo $0 \le x \le 1$ não é enumerável.

E, por conseqüência, o conjunto dos números reais não é enumerável.

2.5.5 O Conjunto dos Números Transcendentes É Não Enumerável

Como o conjunto dos números algébricos é enumerável e o conjunto dos números reais, que é a união do conjunto dos números algébricos com o conjunto dos números transcendentes, não é enumerável segue que o conjunto dos números transcendentes não é enumerável.

Isto nos diz que existem mais números transcendentes do que algébricos pois os números algébricos podem ser apresentados como

[6] A demonstração deste resultado pode ser encontrada no livro "Topologia geral" de Lipschutz.

termos de uma seqüência infinita enquanto que existem números transcendentes em demasia para uma tal representação seqüencial.

2.5.6 O Conjunto dos Números Racionais É Enumerável

Sendo que todo racional é algébrico e que o conjunto dos números algébricos é enumerável temos que, o conjunto dos números racionais também é enumerável.

2.5.7 O Conjunto dos Números Irracionais É Não Enumerável

Já vimos que todo número não algébrico é irracional. Isto quer dizer que todo número transcendente é irracional, ou ainda que o conjunto dos números transcendentes é um subconjunto dos números irracionais.

Como o conjunto dos números transcendentes é não enumerável temos que o conjunto dos números irracionais também não é enumerável.

Com isto podemos afirmar que existem mais números irracionais do que racionais. Ou, como diz Rózsa Péter no livro "Playing with Infinity", os números racionais são as uvas secas espalhadas no bolo dos números irracionais.

2.5.8 Exercício

"Escreva sob a forma de decimais infinitos uma dúzia de números transcendentes diferentes, dando em cada caso a regra de sucessão dos dígitos".[7]

Consideremos todos os números algébricos em sua representação decimal infinita, por exemplo, ao invés de considerar 2,1 vamos considerar 2,099999... .

Sabemos que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Então, podemos fazer uma lista, $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$, com todos os algébricos.

Seja $t_1 = 0{,}123456a_7a_8a_9a_{10}a_{11}...$ um número em representação decimal infinita, onde a_7 é diferente da sétima casa decimal de x_1 e $a_7 \neq 9$, a_8 diferente da oitava casa decimal de x_2 e $a_8 \neq 9$, a_9 diferente da nona casa decimal de x_3 e $a_9 \neq 9$, a_{10} diferente da décima casa decimal de x_4 e $a_{10} \neq 9$, e assim por diante.

Assim, t_1 não termina em uma série infinita de noves e é diferente de todo x_i da lista. Portanto t_1 não está na lista $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$ que contém todos os algébricos.

Logo t_1 é transcendente.

Já temos um número transcendente.

[7] Exercício 12 do livro "História da Matemática" de C. B. Boyer, Ed. Edgard Blücher Ltda., página 418.

Seja $t_2 = 0{,}234567a_7a_8a_9a_{10}\dots$, $t_3 = 0{,}345678a_7a_8a_9a_{10}\dots$,

$t_4 = 0{,}456789a_7a_8a_9a_{10}\dots$, $t_5 = 0{,}987654a_7a_8a_9a_{10}\dots$, $t_6 = 0{,}876543a_7a_8a_9a_{10}\dots$,

$t_7 = 0{,}765432a_7a_8a_9a_{10}\dots$, $t_8 = 0{,}654321a_7a_8a_9a_{10}\dots$, $t_9 = 0{,}543210a_7a_8a_9a_{10}\dots$,

$t_{10} = 0{,}012345a_7a_8a_9a_{10}\dots$, $t_{11} = 0{,}001234a_7a_8a_9a_{10}\dots$, $t_{12} = 0{,}000234a_7a_8a_9a_{10}\dots$, com a_7, a_8, a_9, $\dots$, já construídos em t_1.

Assim temos 12 números transcendentes diferentes.

Com este argumento, além dos 12 acima, podemos construir infinitos números transcendentes.

2.6 ALGUNS NÚMEROS TRANSCENDENTES

A primeira demonstração de que o número e, base dos logaritmos naturais, é transcendente foi dada por Charles Hermite (1822-1901) em 1873 e a primeira demonstração da transcendência de π foi dada por Carl L. F. Lindemann (1852-1939) em 1882.[8] Mas a transcendência de $\log 2$ e $2^{\sqrt{2}}$ são resultados mais recentes, conhecidos somente desde 1934.

O número $2^{\sqrt{2}}$ foi usado como exemplo específico, pelo matemático David Hilbert, quando, em 1900 apresentou uma famosa lista de vinte e três problemas que, a seu ver, eram os mais destacados problemas matemáticos ainda em aberto. O sétimo problema de Hilbert

[8] As demonstrações de que π e e são transcendentes podem ser encontradas em "Números Irracionais e Transcendentes" de Djairo G de Figueiredo.

consistia em decidir se a^b é algébrico ou transcendente, dado que a e b são números algébricos. Em 1934, Alexsander Osipovich Gelfond e, independentemente, Th. Schneider, provaram o seguinte teorema.

2.6.1 Teorema de Gelfond-Schneider[9]

Sejam $a \neq 1$ e $b \neq 1$ algébricos e b não racional, então a^b é transcendente.

2.6.1.1 $2^{\sqrt{2}}$ É Transcendente

A transcendência de $2^{\sqrt{2}}$ é um caso específico desse resultado geral.

2.6.1.2 $\log 2$ É Transcendente

De fato, supondo que $\log 2$ é algébrico e sabendo que não é racional podemos fazer $b = \log 2$ e $a = 10$ no Teorema de Gelfond-Schneider.

[9] A demonstração deste teorema não é simples e pode ser encontrada, segundo Djairo, nos livros: "Irrational Numbers" de Ivan Niven e "Transcendental e Algebraic Numbers" de Gelfond.

Então $a^b = 10^{\log 2} = 2$ será transcendente. Isto é um absurdo pois 2 é algébrico.

Portanto $\log 2$ é transcendente.

2.6.1.3 e^{π} É Transcendente[10]

Sabemos que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ (fórmula de Euler).

Para $x = \dfrac{\pi}{2}$ temos $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

$$\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = (i)^i$$

$$e^{\frac{i^2\pi}{2}} = i^i$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$$

$$\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^2 = (i^i)^2$$

$$e^{-\pi} = i^{2i}$$

Se e^{π} fosse algébrico, então, $(e^{\pi})^{-1} = i^{2i}$ teria que ser algébrico (conforme o item 2.3).

Porém i e $2i$ são algébricos e $2i$ não é racional, logo i^{2i} é transcendente, pelo Teorema Gelfond-Schneider. O que é absurdo.

Portanto e^{π} é transcendente.

---

[10] Extraído da Revista do Professor de Matemática n.º 4, página 15.

3 FRAÇÕES CONTÍNUAS

Um importante ramo da teoria dos números trata da aproximação de um número irracional por números racionais $\frac{p}{q}$ cujos denominadores não são muito grandes.

Um meio de fazer isso é com o uso de frações contínuas simples, que são obtidas da seguinte maneira:

Todo número real x pode ser escrito como uma soma, $x=[x]+(x)$, onde $[x]$ denota a parte inteira de x (o maior inteiro não excedendo x), e (x) denota a diferença $x-[x]$, chamada parte fracionária de x.

Se x é um inteiro, a parte fracionária (x) é zero. Por exemplo, $5=[5]+(5)$, onde $[5]=5$ e $(5)=0$.

Se x não é um inteiro a parte fracionária (x) é positiva e menor do que um. Por exemplo, $2{,}4=[2{,}4]+(2{,}4)$, onde $[2{,}4]=2$ e $(2{,}4)=0{,}4$. Sendo menor do que um, a parte fracionária pode ser escrita como $\frac{1}{y}$ para algum real $y>1$. Por sua vez, o número y pode ser escrito como a soma $[y]+(y)$. Assim, $x=[x]+\frac{1}{y}=[x]+\frac{1}{[y]+(y)}$.

Se $(y)=0$, então $x=[x]+\frac{1}{[y]}$ é um número racional, e a fração contínua terminou.

Mas se $(y)>0$, então $(y)=\frac{1}{z}$ para algum $z>1$, e daí $x=[x]+\cfrac{1}{[y]+\cfrac{1}{[z]+(z)}}$.

Repetindo esse processo temos a representação fracionária contínua de x, $x=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots}}}$, onde $a_0=[x]$, $a_1=[y]$, $a_2=[z]$, e assim por diante. Podemos usar a notação $x=[a_0;a_1,a_2,a_3,\dots]$ para esta representação, onde todos os inteiros depois de a_0 são positivos. Os números a_1, a_2, a_3, ..., são os <u>*elementos*</u> (ou quocientes parciais) da fração contínua.

Se x é racional, o processo termina após um número finito de passos e a fração contínua é finita. Por exemplo, $\frac{22}{7}=[3;7]$ e $\frac{355}{113}=[3;7,16]$.

Quando x é irracional, a fração contínua é infinita. Por exemplo, $\pi=[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,\dots]$.

Truncando a fração contínua de um número irracional x após o inteiro a_n produzimos um número racional $\frac{p_n}{q_n}=[a_0;a_1,a_2,\dots,a_n]$, chamado de <u>*n-ésimo convergente*</u> de x.

Segundo a Enciclopédia Britânica, as frações contínuas são úteis porque $\frac{p_n}{q_n}$ está mais próximo de x do que qualquer outro número racional com denominador menor ou igual a q_n. Por exemplo, o terceiro convergente de π é $[3;7,15,1]=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+1}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}=$

$=3+\cfrac{1}{\cfrac{112+1}{16}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{113}{16}}=3+\frac{16}{113}=\frac{339+16}{113}=\frac{355}{113}$, uma fração mais próxima de π que qualquer outra com denominador menor ou igual a 113.

3.1 NOMES LIGADOS À HISTÓRIA DAS FRAÇÕES CONTÍNUAS[11]

Rafael Bombelli (1526-1573): parece ter sido o primeiro a fazer uso explícito de frações contínuas (infinitas). Em 1572, escreveu o que em notação moderna é $\sqrt{13}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\ldots}}}$.

Pietro Antonio Cataldi (1548-1626): credita-se a ele o mérito de ter dado os primeiros passos na teoria das frações contínuas, em 1613. No seu tratado publicado em Bolonha sobre extração de raízes

[11] Extraídos de "Introdução à História da Matemática" de Eves, "Aproximação de um Número Real por Números Racionais" de Lequain e do artigo "Frações Contínuas" de Tathan.

quadradas de números introduziu a motivação para a notação usada posteriormente por Huygens.

John Wallis (1616-1703): descobriu numerosas propriedades dos convergentes. Obteve a expressão $\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8. \ldots}{1.3.3.5.5.7.7. \ldots}$.

William Brouncker (1620-1684): foi o primeiro britânico a investigar e usar as propriedades das frações contínuas. Obteve a fração contínua $\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}$ à partir da expressão de Wallis para $\frac{\pi}{2}$.

Christiann Huygens (1629-1695): Introduziu uma forma moderna de simbolismo que expressava a razão $\frac{77708431}{2640858}$ como

$$29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}}$$

Huygens usou esta razão em 1680 ao desenhar as rodas dentadas de seu planetário.

Leonhard Euler (1707-1783): foi um dos primeiros matemáticos a desenvolver os fundamentos modernos da teoria das frações contínuas. Mostrou que qualquer irracional quadrático, $a+\sqrt{b}$ com a e b racionais, pode ser representado por uma fração contínua periódica simples.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777): mostrou, em 1761, que a seguinte fração contínua para π, $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\ldots}}}}$ não é periódica e, portanto, não é um irracional quadrático.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813): provou que frações contínuas periódicas simples representam soluções de equações quadráticas com coeficientes racionais. Forneceu a primeira exposição completa da convergência dos convergentes. Mostrou que em geral todo convergente ímpar é menor que todos os convergentes seguintes e todo convergente par é maior que todos os convergentes seguintes.

Adrien Marie Legendre (1752-1833): provou, em 1794, que toda fração contínua infinita é irracional.

Dirichlet (1805-1859): introduziu a notação $x=(a_0;a_1,a_2,a_3,\ldots)$, em 1854.

Thomas Joannes Stieltjes: descobriu, em 1894, uma relação entre séries divergentes e frações contínuas convergentes que permitiu definir integração para as séries. De certa maneira, as integrais de Stieltjes foram resultado de seu trabalho com frações contínuas.

Mais recentemente, Siegel, Hurwitz, Markoff, Thue, Roth (medalha Fields em 1958) e K. Vahln contribuíram à história das Frações Contínuas.

3.2 FRAÇÕES CONTÍNUAS PARA NÚMEROS RACIONAIS

A expansão em frações contínuas de números racionais sempre termina. A demonstração pode ser encontrada no livro "Aproximação de um número real por números racionais" de Yves Lequain, 19º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1993.

Tomaremos dois exemplos, $\frac{13}{21}$ e $-\frac{86}{31}$, para mostrar como obter frações contínuas simples para números racionais a partir do Algoritmo da Divisão em **Z**.

$$\frac{13}{21}=0+\frac{13}{21}=0+\cfrac{1}{\cfrac{21}{13}}=0+\cfrac{1}{\cfrac{13\cdot(1)+8}{13}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{8}{13}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{13}{8}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{8\cdot(1)+5}{8}}}=$$

$$=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{8}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{8}{5}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{5.(1)+3}{5}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}}}}=$$

$$=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3.(1)+2}{3}}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}}}=$$

$$=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2.(1)+1}{2}}}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

Obtemos, assim, $\frac{13}{21}=[0;1,1,1,1,1,2]$.

Porém, podemos continuar a expansão e obter:

$$\frac{13}{21}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}}$$

Obtendo, daí, $\frac{13}{21}=[0;1,1,1,1,1,1,1]$.

Assim, temos duas representações para o mesmo número. Na verdade, podemos expressar qualquer número racional em fração contínua simples de duas formas, a saber, $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n]$ e $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n-1,1]$.

Para desenvolver $-\frac{86}{31}$ em fração contínua, primeiro aplicamos o Algoritmo da Divisão aos números $a=-86$ e $b=31$.

$$-86=31.(-3)+7,\quad 0\leq 7<|31|$$

$$-\frac{86}{31}=\frac{31.(-3)+7}{31}=-3+\frac{7}{31}=-3+\cfrac{1}{\frac{31}{7}}=-3+\cfrac{1}{\frac{7.(4)+3}{7}}=-3+\cfrac{1}{4+\frac{3}{7}}=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{7}{3}}}=$$

$$=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{2.(3)+1}{3}}}=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}$$

Obtemos a primeira representação, $-\frac{86}{31}=[-3;4,2,3]$.

Continuando, $-\frac{86}{31}=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{1}}}}$.

A outra representação é $-\dfrac{86}{31}=[-3;4,2,2,1]$.

3.3 EXPANSÃO DE π EM FRAÇÃO CONTÍNUA

Podemos determinar a expansão de π em fração continua usando uma calculadora e a representação decimal $\pi = 3{,}141592653\ldots$.

Como $3{,}1 \leq \pi \leq 3{,}2$, então, $a_0 = 3$ e $\pi = 3 + \dfrac{1}{a_1}$, onde $0{,}1 \leq \dfrac{1}{a_1} \leq 0{,}2$.

$$\frac{1}{0{,}1} \geq a_1 \geq \frac{1}{0{,}2}$$

$$10 \geq a_1 \geq 5$$

Não conseguimos determinar a parte inteira de a_1. Então, vamos usar a aproximação $3{,}14$ para π.

De $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$ tiramos $\pi = 3 + \dfrac{1}{a_1}$, onde $0{,}14 \leq \dfrac{1}{a_1} \leq 0{,}15$.

$$\frac{1}{0{,}14} \geq a_1 \geq \frac{1}{0{,}15}$$

$$7{,}142857143 \geq a_1 \geq 6{,}666\ldots$$

A parte inteira de a_1 pode ser 6 ou 7. Portanto, ainda não conseguimos determinar $[a_1]$. Temos que usar $\pi \cong 3{,}141$.

De $3{,}141 \leq \pi \leq 3{,}142$ e $\pi = 3 + \dfrac{1}{a_1}$ obtemos $0{,}141 \leq \dfrac{1}{a_1} \leq 0{,}142$.

$$\frac{1}{0{,}141} \geq a_1 \geq \frac{1}{0{,}142}$$

$$7{,}092198582 \ge a_1 \ge 7{,}042253521$$

Portanto $[a_1] = 7$ e $\pi = 3 + \frac{1}{a_1} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{a_2}}$.

Agora, queremos determinar a parte inteira de a_2.

Como $7{,}092198582 \ge a_1 \ge 7{,}042253521$ e $[a_1] = 7$, temos que $0{,}04 \le 0{,}042253521 \le \frac{1}{a_2} \le 0{,}092198582 \le 0{,}1$.

$$0{,}04 \le \frac{1}{a_2} \le 0{,}1$$

$$\frac{1}{0{,}04} \ge a_2 \ge \frac{1}{0{,}1}$$

$$25 \ge a_2 \ge 10$$

Não conseguimos determinar $[a_2]$.

Usaremos $0{,}042 \le \frac{1}{a_2} \le 0{,}093$.

$$\frac{1}{0{,}042} \ge a_2 \ge \frac{1}{0{,}093}$$

$$23{,}80952381 \ge a_2 \ge 10{,}75268817$$

Ainda não determinamos $[a_2]$.

Usando a melhor aproximação que temos:

$$0{,}042253521 \le \frac{1}{a_2} \le 0{,}092198582$$

$$\frac{1}{0{,}042253521} \ge a_2 \ge \frac{1}{0{,}092198582}$$

$$23{,}66666674 \ge a_2 \ge 10{,}84615379$$

Ainda não determinamos $[a_2]$.

Então, temos que pegar uma aproximação melhor para π. Usaremos a aproximação máxima que obtemos com uma calculadora de dez dígitos, $\pi = 3{,}141592653$.

$a_0 = 3$ e $\pi = 3 + \dfrac{1}{a_1}$

$$0{,}141592653 \leq \frac{1}{a_1} \leq 0{,}141592654$$

$$\frac{1}{0{,}141592653} \geq a_1 \geq \frac{1}{0{,}141592654}$$

$$7{,}062513335 \geq a_1 \geq 7{,}062513305$$

Portanto $[a_1] = 7$ e $\pi = 3 + \dfrac{1}{a_1} = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{a_2}}$.

$$0{,}062513305 \leq \frac{1}{a_2} \leq 0{,}062513335$$

$$\frac{1}{0{,}062513305} \geq a_2 \geq \frac{1}{0{,}062513335}$$

$$15{,}99659464 \geq a_2 \geq 15{,}99658688$$

Assim, $[a_2] = 15$ e $\pi = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{a_2}} = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15 + \dfrac{1}{a_3}}}$.

Vamos determinar $[a_3]$.

$$15{,}99658688 \leq a_2 \leq 15{,}99659464$$

$$0{,}99658688 \leq \frac{1}{a_3} \leq 0{,}996594644$$

$$\frac{1}{0{,}99658688} \geq a_3 \geq \frac{1}{0{,}996594644}$$

$$1{,}003424808 \geq a_3 \geq 1{,}003416991$$

Portanto, $[a_3]=1$ e $\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a_4}}}}$

Vamos determinar $[a_4]$.

$$0{,}003424808 \geq \frac{1}{a_4} \geq 0{,}003416991$$

$$\frac{1}{0{,}003424808} \leq a_4 \leq \frac{1}{0{,}003416991}$$

$$291{,}9871653 \leq a_4 \leq 292{,}6551323$$

Não conseguimos determinar a parte inteira de a_4. Teríamos que usar uma aproximação melhor para π e uma calculadora com mais dígitos no visor. Entretanto, vamos parar por aqui, afinal a expansão em frações continuas para π é infinita.

3.4 EXPANSÃO DE e EM FRAÇÕES CONTÍNUAS

A expansão em frações contínuas simples para e é dada por

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}} = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,\ldots,1,2n,1,\ldots].$$

A dedução desta expressão é encontrada no livro "Aproximação de um número real por números racionais" de Yves Lequain, IMPA, 19º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1993.

Existe outra expansão em fração continuas para e, porém essa não é simples:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}}$$

3.5 EXPANSÃO DE $\log 2$ EM FRAÇÕES CONTÍNUAS

Seja $x = \log 2$.

Então, pela definição de logaritmo $10^x = 2$.

Note que $10^0 < 2 < 10^1$, então, $10^0 < 10^x < 10^1$ e, portanto, $0 < x < 1$.

Então, $x = 0 + \dfrac{1}{y}$.

Já obtemos a_0, vamos descobrir a_1.

$$10^x = 10^{0+\frac{1}{y}} = 2$$

$$10^{\frac{1}{y}} = 2$$

$$\left(10^{\frac{1}{y}}\right)^y = 2^y$$

$$10 = 2^y$$

Mas, $2^3 < 10 < 2^4$, então, $2^3 < 2^y < 2^4$ e $3 < y < 4$.

Então, a parte inteira de y é 3.

Daí, $x = 0 + \frac{1}{y} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{z}}$.

Já obtemos a_0 e a_1, vamos descobrir a_2.

$$10 = 2^y$$

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z}}$$

$$10 = 2^3 . 2^{\frac{1}{z}}$$

$$10 = 8 . 2^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{10}{8} = 2^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{5}{4} = 2^{\frac{1}{z}}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^z = \left(2^{\frac{1}{z}}\right)^z$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^z = 2$$

Note que $\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$, então, $\left(\frac{5}{4}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^z < \left(\frac{5}{4}\right)^4$ e $3 < z < 4$.

Então, a parte inteira de z é 3.

Daí, $x = 0 + \frac{1}{y} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{u}}}$.

Já obtemos a_0, a_1 e a_2, vamos descobrir a_3.

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{z}$$

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{u}}$$

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3}.\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}}$$

$$2=\frac{125}{64}.\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}}$$

$$\frac{128}{125}=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{u}=\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}}\right)^{u}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{u}=\frac{5}{4}$$

Mas $\left(\frac{128}{125}\right)^{9}<\frac{5}{4}<\left(\frac{128}{125}\right)^{10}$, então, $\left(\frac{128}{125}\right)^{9}<\left(\frac{128}{125}\right)^{u}<\left(\frac{128}{125}\right)^{10}$ e $9<u<10$.

Então, a parte inteira de u é 9.

Daí, $x=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{u}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{w}}}}$.

Já obtemos a_0, a_1, a_2 e a_3, vamos descobrir a_4.

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{u}=\frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{9+\frac{1}{w}}=\frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^9 \cdot \left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{1}{w}} = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{2^7}{5^3}\right)^9 \cdot \left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{1}{w}} = \frac{5}{2^2}$$

$$\frac{2^{63}}{5^{27}} \cdot \left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{1}{w}} = \frac{5}{2^2}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{1}{w}} = \frac{5^{28}}{2^{65}}$$

$$\left(\left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{1}{w}}\right)^w = \left(\frac{5^{28}}{2^{65}}\right)^w$$

$$\frac{128}{125} = \left(\frac{5^{28}}{2^{65}}\right)^w$$

Mas $\left(\frac{5^{28}}{2^{65}}\right)^2 < \frac{128}{125} < \left(\frac{5^{28}}{2^{65}}\right)^3$, então, $\left(\frac{5^{28}}{2^{64}}\right)^2 < \left(\frac{5^{28}}{2^{64}}\right)^w < \left(\frac{5^{28}}{2^{64}}\right)^3$ e $2 < w < 3$.

Então, a parte inteira de w é 2.

Daí, $x = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{w}}}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{p}}}}}$.

Já obtemos a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4. Entretanto, vamos parar por aqui afinal, sendo $x = \log 2$ irracional e não quadrático (pois é transcendente), sua expansão em fração contínua é infinita e não-periódica.

$$\log 2 = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

3.6 EXPANSÃO EM FRAÇÕES CONTÍNUAS PARA ALGUNS IRRACIONAIS ALGÉBRICOS

3.6.1 Expansão para a Razão (ou Secção) Áurea

A razão áurea é o número $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, para o qual tende a seqüência $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ onde $(F_n) = (1,1,2,3,5,\ldots)$ é a famosa seqüência de Fibonacci definida indutivamente como $F = 1_1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$2\alpha = 1 + \sqrt{5}$$

$$2\alpha - 1 = \sqrt{5}$$

$$(2\alpha - 1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 5$$

$$4\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$\alpha^2 = \alpha + 1$

Como $\alpha \neq 0$,

$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$

$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$

Substituindo α por $1 + \frac{1}{\alpha}$, temos:

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha}}$$

Novamente, substituindo α por $1 + \frac{1}{\alpha}$, temos:

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha}}}$$

Repetindo este processo infinitas vezes, temos que $\alpha = [1;1,1,1,1,1,1,\ldots]$.

3.6.2 Expansão de $\sqrt{3}$ em Frações Contínuas

O primeiro passo é descobrir a parte inteira de $\sqrt{3}$. Usando uma calculadora vemos que $\lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$.

Então, $\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3})$. Note que $(\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ onde $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$.

Lembre-se que (x) representa a parte fracionária e $[x]$ a parte inteira de x.

Daí, $\sqrt{3}=1+\sqrt{3}-1=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}$.

Multiplicando o numerador e o denominador de $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ pelo conjugado de $\sqrt{3}-1$, temos:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\cfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{3-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

Agora, temos que saber qual é a parte inteira de $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Usando, novamente, a calculadora descobrimos que $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]=1$.

Então, $\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}$.

Perceba que $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{3}+1-2}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, onde $0<\frac{\sqrt{3}-1}{2}<1$.

Daí, $\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}$.

Multiplicando o numerador e o denominador de $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ pelo conjugado de $\sqrt{3}-1$, temos:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\cfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2\sqrt{3}+2}{3-1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2\sqrt{3}+2}{2}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}.$$

A parte inteira de $\sqrt{3}+1$ é 2.

Então, $\sqrt{3}+1=2+(\sqrt{3}+1)$, onde $(\sqrt{3}+1)=\sqrt{3}+1-2=\sqrt{3}-1$ e $0<\sqrt{3}-1<1$.

Daí, $\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}}.$

Multiplicando o numerador e o denominador de $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ pelo conjugado de $\sqrt{3}-1$, temos:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\cfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{3-1}}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}.$$

Agora, teríamos que descobrir a parte inteira de $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Porém, note que isto já foi feito, $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]=1$. Portanto, a partir de agora os passos irão se repetir.

Logo, $\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$ ou $\sqrt{3}=[1;1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots]$.

Podemos usar este método para obter a expansão em frações contínuas simples de outros radicais. Por exemplo, $\sqrt{2}=[1;2,2,2,2,2,\ldots]$, $\sqrt{5}=[2;4,4,4,4,4,4,\ldots]$, $\sqrt{6}=[2;2,4,2,4,2,4,2,4,\ldots]$ e $\sqrt{7}=[2;1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,4,\ldots]$.

Observe que todos estes radicais têm expansão em frações contínuas simples periódica, afinal, são irracionais quadráticos.

3.7 FRAÇÃO CONTÍNUA PERIÓDICA

Uma fração contínua $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ é periódica se existem inteiros n_0 e $m\geq 1$ tal que $a_{n+m}=a_n$, para todo $n>n_0$.

Assim, $\alpha=\left[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{n_0-1},\overline{a_{n_0},a_{n_0+1},\ldots,a_{n_0+m-1}}\right]$

Por exemplo, $\sqrt{31}=\left[5;\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}\right]$.

Esta expansão é facilmente obtida usando-se uma calculadora que tenha a tecla $\frac{1}{x}$. Basta seguir o seguinte roteiro, que é uma forma mais simples do que foi feito para $\sqrt{3}$ na sessão 3.6.2:

Primeiro passo: fazemos $\sqrt{31}$ para obter o elemento a_0. $\sqrt{31}=5.567764363$. Assim, $a_0=5$.

Segundo passo: Do resultado anterior, $\sqrt{31} = 5.567764363$, subtraímos a parte inteira, 5. Teremos, então, $\sqrt{31} - 5 = 0.567764363$.

Terceiro passo: Teclamos $\frac{1}{x}$ e obtemos o elemento $a_1 = 1$.

Quarto passo: Subtraímos a parte inteira.

Quinto passo: Teclamos $\frac{1}{x}$ e obtemos o próximo elemento.

Sexto passo: voltamos ao quarto passo.

E assim sucessivamente até obtermos o período.

3.8 SUBCONJUNTOS ESPECIAIS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Número Nobre: é um número irracional $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ tal que $a_n = 1$ para todo $n \geq m$, para algum m natural.

O mais nobre de todos os números é a razão áurea pois, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;1,1,1,1,1,1,\ldots]$.

Outros exemplos de números nobres: $[0;1,2,1,1,1,1,1,1,\ldots]$, $[0;2,32,1,1,1,1,\ldots]$, $[0;3,4,5,7,9,132,5,2,1,1,1,1,1,1,\ldots]$.

O conjunto dos números nobres é denso em **R-Q**. A idéia para a prova desta afirmação é acrescentar uma "cauda nobre" a um convergente de qualquer número $w \in (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$, obtendo, assim, uma aproximação arbitrariamente boa para w, conforme diz J. D. Meiss, citado na bibliografia.

Irracional Quadrático: é um número irracional $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ que é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros.

Exemplos de irracionais quadráticos são $\sqrt{2}$, que é solução de $x^2 - 2 = 0$, e $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é solução de $x^2 - x - 1 = 0$.

Número do Tipo Constante: é um número $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ tal que existe uma constante $k > 0$ tal que $a_n < k$ para todo n.

Exemplos de números dos tipo constante são todos os números nobres e a média prateada $1 + \sqrt{2} = [2;2,2,2,2,\ldots]$.

Número Diofantino: é um número $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ para o qual existe um $C > 0$ tal que para todos os inteiros p e q com $p \neq 0$ e $q \neq 0$, $|q\alpha - p| > \frac{C}{q^\omega}$ para algum $\omega \geq 1$.

Da definição, segue imediatamente que todo número diofantino é irracional.

3.8.1 Todo Número Nobre É Irracional Quadrático

Euler (1737) e Lagrange (1770) provaram que um número real é irracional algébrico de grau dois se e somente se sua expansão em fração contínua é infinita e periódica. A demonstração pode ser encontrada da página 58 até a página 62 do livro de Yves já citado anteriormente.

Se α é nobre então $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, 1,1,1,1,1,1, \ldots]$.

Note que esta expansão é periódica, seu período é 1.

Pelo resultado de Euler e Lagrange tem-se que toda fração contínua periódica simples é um irracional quadrático.

Logo, todo número nobre é um irracional quadrático.

3.8.2 Todo Irracional Quadrático É do Tipo Constante

Novamente, pelo resultado de Euler e Lagrange, todo irracional quadrático, α, pode ser representado por uma fração contínua periódica simples.

Sendo periódica, o conjunto dos elementos de α é finito.

Assim, podemos encontrar o maior de seus elementos e fazendo k maior que o maior de seus elementos temos que $a_n < k$ para todo n.

Logo, todo irracional quadrático é do tipo constante.

3.8.3 Todo Irracional Quadrático É Algébrico

Se α é irracional quadrático então α é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros.

Portanto, α é algébrico.

3.8.4 Todo Irracional Algébrico É Diofantino

O teorema de Liouville afirma que "para todo irracional algébrico de grau $n \geq 2$, existe um número $C > 0$ tal que $\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}$, para inteiros arbitrários p e q $(q > 0)$".

A desigualdade $\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}$ pode ser rescrita como $|qa - p| > \frac{C}{q^{n-1}}$, com $n - 1 = \omega > 1$.

Logo a é diofantino com $\omega = n - 1 > 1$.

3.8.5 Todo Número do Tipo Constante É Diofantino

Para esta demonstração, usaremos dois resultados encontrados no livro de Yves Lequain, 19° Colóquio Brasileiro de Matemática, 1993.

Primeiro resultado: Seja $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, um número real e $\frac{p_n}{q_n}$ a forma irredutível do n-ésimo convergente de α. Então,

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^{\,2}} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}.q_n^{\,2}}.$$

Segundo resultado: Toda fração irredutível $\frac{p}{q}$ que satisfaz a desigualdade $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2.q^2}$ é um convergente do número α.

Demonstração: Seja $\alpha = [a_0; a_1, ..., a_n, ...]$ um número do tipo constante e $\frac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente de α.

Então, $a_n < k$ para todo $n > 0$ e algum $k > 0$.

$a_n < k$

$a_n \leq k$

$a_n + 2 \leq k + 2$

$$\frac{1}{a_n + 2} \geq \frac{1}{k+2}$$

$$\frac{1}{(a_n + 2)q_{n-1}^2} \geq \frac{1}{(k+2)q_{n-1}^2}$$

Daí, pelo primeiro resultado:

$$\frac{1}{(k+2)q_{n-1}^2} \leq \frac{1}{(a_n + 2)q_{n-1}^2} < \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

Tomando $C = \frac{1}{k+2}$ temos $\frac{C}{q_{n-1}^2} < \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$, $n = 1,2,3,4,...$.

Para ser diofantino com $\varpi = 2$ temos que garantir que $\frac{C}{b^2} < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$ para todo $\frac{a}{b}$ racional. Já vimos que é válido quando $\frac{a}{b}$ é um convergente de α. Temos que ver se é válido para os outros casos.

Vamos supor o contrário, que existe um número racional $\frac{a}{b}$ que não é um convergente de α e para o qual $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{C}{b^2}$.

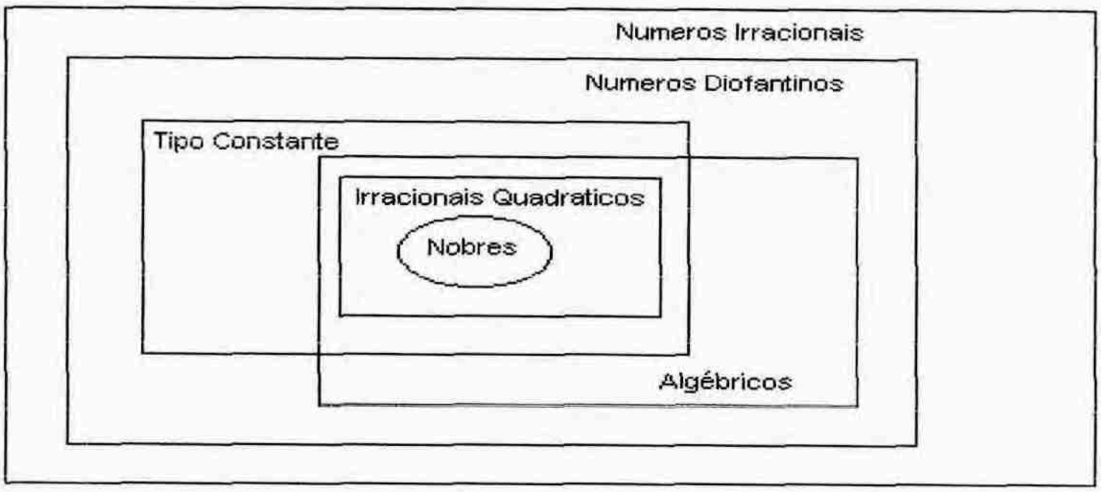
Mas, $C = \frac{1}{k+2}$, então $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{(k+2)b^2}$.

Como $k > 0$ temos $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{(k+2)b^2} < \frac{1}{2b^2}$.

Porém, pelo segundo resultado, temos que $\frac{a}{b}$ é um convergente de α. O que é uma contradição.

Portanto, $\frac{C}{b^2} < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$ para todo $\frac{a}{b}$ racional.

Logo, todo número do tipo constante é diofantino com $\varpi = 2$.



CONCLUSÃO

A elaboração desta monografia trouxe um surpreendente enriquecimento à minha formação matemática. Afinal, conheci dois assuntos que não fazem parte do currículo do curso de licenciatura em Matemática: Números Algébricos e Transcendentes e Frações Contínuas.

Estamos acostumados a dividir os números Reais em Racionais e Irracionais. Em geral, desconhecemos a divisão em Transcendentes e Algébricos que é mais abrangente pois atinge, também, os números Complexos. Esta divisão é importante no estudo da Álgebra e da Teoria de Números.

Já a teoria das Frações Contínuas se mostra cada vez mais viva. Está presente em artigos recentes de revistas como: Matemática Universitária, Revista do Professor de Matemática e Eureka. É utilizada nas novas técnicas para fatorar números grandes e no estudo de soluções inteiras de equações do tipo $x^2 - A^2y^2 = d^2$ (equação de Pell).

Além de abrir as portas à estes dois "novos" assuntos, acredito que a elaboração deste trabalho foi compensadora pois o mesmo poderá servir como material de estudo, sobre Números Irracionais, para professores do ensino Fundamental e Médio.

BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, G. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática (RPM).** São Paulo, SP, n.5, p.06-11, 2º semestre de 1984.

BOTELHO, M. H. C. Seção: o leitor pergunta. **Revista do Professor de Matemática (RPM).** São Paulo, SP, n.9, p.64, 2º semestre de 1986.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Trad. Elsa F. Gomide. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher, 1974. 488p. (original inglês).

COURANT, R. & ROBBINS H. **What is mathematics?;** na elementary approach to ideas and methods. 4 ed. Oxford: Oxford University Press, 1979. 533p.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. 2 ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997. 843p. (original inglês).

FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes**. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1980. 104p.

KLEIN, F. **Famous problems of elementary geometry**; the duplication of the cube, the trisection of an angle, the quadrature of the circle. Trad. Wooster Woodruff Beman. New York: Dover Publications, Inc., 1956. 92p. (original alemão).

LEQUAIN, Y. **Aproximação de um número real por números racionais**; 19º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993. 151p.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria;** comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. 100p.

LIPSCHUTZ, S. **Topologia geral;** resumo da teoria, 650 problemas resolvidos, 391 problemas propostos. Trad. Alfredo Alves de Faria. São Paulo, SP: McGraw-Hill do Brasil, 1973. 301p. (original inglês).

MEISS, J. B. Sympletic maps, variational principles and transport. **Reviews of modern physics.** New York, NY, v.63, n.03, p.813-815, julho de 1992.

NIVEN, I. M. **Números: racionais e irracionais.** Trad. Renate Watanable. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. 216p. (original inglês).

PENHA, G. M. de La. Euler e a Teoria dos Números. **Revista do Professor de Matemática (RPM).** São Paulo, SP, n.4, p.12-15, 1° semestre de 1984.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com geometria analítica.** Trad. Seiji Hariki. São Paulo, SP: McGraw-Hill, 1987. Vol.2, 807p. (original inglês).

SPIVAK, M. **Calculus.** 3 ed. Houston, Texas: Publish or Perish, Inc., 1994. 670p.

TATHAN, E. J. Frações contínuas. In: Baumgart, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula;** álgebra. São Paulo, SP: PUB: Atual, 1993. VOLUME, Cap.3, p. 37-41.

The New Encyclopaedia Britannica. 15 ed. 1990. p 26-27. Vol. 25.

WAGNER, E. **Construções geométricas.** Rio de Janeiro, RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993. 110p.